

2. Προεξόφληση συναλλαγματικών σε διαταγή (γραμματίων)

Οι σύγχρονες συναλλαγές έχουν σαν βασικό χαρακτηριστικό τους την μερική ή ολική αντικατάσταση του χρήματος με την πίστη. Δηλαδή στο σύνολο σχεδόν των συναλλαγών, οι συναλλασσόμενοι δεν συναλλάσσονται πλέον αποκλειστικά με μετρητά, αλλά και επί πιστώσει χωρίς τη μεσολάβηση του χρήματος.

Με τις επί πιστώσει συναλλαγές δημιουργείται η έννοια της απαίτησης. Αυτή συνήθως παίρνει την μορφή της συναλλαγματικής εις διαταγή (γραμματίου), η οποία εκδίδεται από τον εκδότη (πωλητή) και αποτελεί εντολή προς τον οφειλέτη (πελάτη) να πληρώσει το αναγραφόμενο ποσό σε ορισμένο τόπο και χρόνο.

Οι εκδότες - κάτοχοι γραμματίων με οφειλέτες τους πελάτες τους ενεργούν με τους εξής τρόπους:

- Τοποθετούν τα γραμμάτια σε ασφαλές μέρος και περιμένουν να λήξουν για να εισπράξουν το αναγραφόμενο ποσό από τους οφειλέτες τους.
- Μεταβιβάζουν με οπισθογράφηση τα γραμμάτια που κατέχουν σε τρίτους, οπότε μεταβιβάζουν και την απαίτησή τους.
- Αναθέτουν σε τράπεζα να εισπράξει τα αναγραφόμενα ποσά των γραμματίων που κατέχουν έναντι προμήθειας.
- Στη περίπτωση που έχουν ανάγκη χρημάτων, ρευστοποιούν τα γραμμάτια που κατέχουν σε τράπεζα, οπότε τους παρακρατούνται οι τόκοι που αντιστοιχούν στο χρονικό διάστημα από την ημέρα της ρευστοποίησης του γραμματίου μέχρι τη λήξη του.

Η ρευστοποίηση αυτή λέγεται **προεξόφληση**. Οι τόκοι δε που παρακρατούνται από την τράπεζα κατά την ρευστοποίηση των γραμματίων ονομάζονται **προεξόφλημα**. Το προεξόφλημα υπολογίζεται με τους εξής δυο μεθόδους:

- 1) Βάση της **Ονομαστικής Αξίας (Κ)**, δηλαδή του ποσού που αναγράφεται στο γραμμάτιο και εισπράττεται κατά τη λήξη του. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται **Εξωτερική Προεξόφληση** και το προεξόφλημα που παρακρατείται από την τράπεζα **Εξωτερικό Προεξόφλημα (Ε)**.
- 2) Βάση της **Παρούσας Αξίας (Α)**, δηλαδή του ποσού που εισπράττεται κατά την προεξόφληση του γραμματίου. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται **Εσωτερική Προεξόφληση** και το προεξόφλημα που παρακρατείται από την τράπεζα **Εσωτερικό Προεξόφλημα (Ε')**.

2.1 Βασικοί τύποι προεξόφλησης γραμματίων

α) Υπολογισμός εξωτερικού προεξοφλήματος συναρτήσει της ονομαστικής αξίας

Σύμφωνα με τον προαναφερθέντα ορισμό της εξωτερικής προεξόφλησης, το εξωτερικό προεξόφλημα υπολογίζεται βάση της ονομαστικής αξίας του γραμματίου αφενός και αφετέρου επειδή αποτελεί στην ουσία παρακρατηθέντα τόκο, λαμβάνεται υπόψη το επιτόκιο προεξόφλησης και το χρονικό διάστημα από την ημέρα προεξόφλησης του γραμματίου έως την ημέρα λήξης του.

Δηλαδή ο τύπος υπολογισμού του είναι ανάλογος του τύπου του απλού τόκου, όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ημέρες. Θα είναι δηλαδή:

$$E = \frac{K \cdot v \cdot i}{360}$$

όπου:

K = η ονομαστική αξία του γραμματίου

v = οι ημέρες προεξόφλησης, δηλαδή ο αριθμός ημερών από την ημέρα προεξόφλησης, μέχρι την ημέρα λήξης του γραμματίου

i = το επιτόκιο προεξόφλησης

Για την απλούστευση του τύπου, αν διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος με i θα έχουμε:

$$E = \frac{\frac{K \cdot v \cdot i}{360}}{i}$$

Στην συνέχεια απαλείφοντας το i από τον αριθμητή και θέτοντας όπου $\frac{360}{i} = \Delta$ (Διαιρέτης)

ο αρχικός τύπος γίνεται:

$$E = \frac{K \cdot v}{\Delta} \quad (1)$$

Με βάση τον προαναφερθέντα βασικό τύπο ορισμού εξάγονται όλοι οι αναγκαίοι τύποι υπολογισμού, που εφαρμόζονται στην επίλυση προβλημάτων εξωτερικής προεξόφλησης γραμματίων, όπου κάθε φορά το ζητούμενο θα είναι είτε το προεξόφλημα, είτε η ονομαστική αξία, είτε η παρούσα αξία, είτε ο χρόνος προεξόφλησης. Δεν υπάρχει δηλαδή λόγος αποστήθισης πολλών τύπων, απλώς απαιτείται πρακτική εξάσκηση στην επίλυση προβλημάτων εξωτερικής προεξόφλησης γραμματίων.

β) Υπολογισμός εσωτερικού προεξοφλήματος συναρτήσει της παρούσας αξίας

Σύμφωνα με τον προαναφερθέντα ορισμό της εσωτερικής προεξόφλησης, το εσωτερικό προεξόφλημα υπολογίζεται βάση της παρούσας αξίας του γραμματίου (του ποσού που εισπράττεται κατά την προεξόφληση) αφενός και αφετέρου επειδή αποτελεί στην ουσία παρακρατηθέντα τόκο, λαμβάνεται υπόψη το επιτόκιο προεξόφλησης και το χρονικό διάστημα από την ημέρα προεξόφλησης του γραμματίου έως την ημέρα λήξης του.

Δηλαδή ο τύπος υπολογισμού του είναι ανάλογος του τύπου του απλού τόκου, όταν ο χρόνος εκφράζεται σε ημέρες. Θα είναι δηλαδή:

$$E = \frac{A \cdot v \cdot i}{360}$$

όπου:

A = η παρούσα αξία του γραμματίου

v = οι ημέρες προεξόφλησης, δηλαδή ο αριθμός ημερών από την ημέρα προεξόφλησης, μέχρι την ημέρα λήξης του γραμματίου

i = το επιτόκιο προεξόφλησης

Για την απλούστευση του τύπου, αν διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος με i θα έχουμε:

$$E = \frac{\frac{A \cdot v \cdot i}{360}}{i}$$

Στην συνέχεια απαλείφοντας το i από τον αριθμητή και θέτοντας όπου $\frac{360}{i} = \Delta$ (Διαίρετης)

ο αρχικός τύπος γίνεται:

$$E = \frac{A \cdot v}{\Delta} \quad (5)$$

Με βάση τον προαναφερθέντα βασικό τύπο ορισμού εξάγονται όλοι οι αναγκαίοι τύποι υπολογισμού, που εφαρμόζονται στην επίλυση προβλημάτων εσωτερικής προεξόφλησης γραμματίων, όπου κάθε φορά το ζητούμενο θα είναι είτε το προεξόφλημα, είτε η ονομαστική αξία, είτε η παρούσα αξία, είτε ο χρόνος προεξόφλησης. Δεν υπάρχει δηλαδή λόγος αποστήθισης πολλών τύπων, απλώς απαιτείται πρακτική εξάσκηση στην επίλυση προβλημάτων εσωτερικής προεξόφλησης γραμματίων.

Παράδειγμα 1

Ένας έμπορος πούλησε επί πιστώσει σε ένα πελάτη του εμπορεύματα αξίας 5.000€. Συμφώνησαν μεταξύ τους να εκδώσει ο πρώτος στο δεύτερο δυο γραμμάτια με αντίστοιχες λήξεις στις 30/4 και 30/6. Με δεδομένο ότι, ο έμπορος σκοπεύει να προεξοφλήσει στις 15/3 σε τράπεζα τα δυο γραμμάτια και να λάβει κατά την προεξόφληση του καθενός τη μισή αξία του εμπορεύματος που πούλησε, να υπολογισθούν τα προεξοφλήματα και οι ονομαστικές αξίες που αναγράφονται στα δυο γραμμάτια και με τις δυο μεθόδους προεξόφλησης. Να ληφθεί υπόψη ότι, η τράπεζα εφαρμόζει επιτόκιο προεξόφλησης 10% και εμπορικό έτος, δηλαδή σύνολο ημερών έτους 360 και 30 ημέρες όλοι οι μήνες του έτους.

Λύση

1) Υπολογισμός του προεξοφλήματος E και της ονομαστικής αξίας K του γραμματίου που έχει λήξη στις 30/4 με εξωτερική προεξόφληση.

Ξεκινάμε με το βασικό τύπο του εξωτερικού προεξοφλήματος:

$$E = \frac{K \cdot v}{\Delta}$$

Επειδή μας ζητείται να υπολογίσουμε το προεξόφλημα και την ονομαστική αξία του γραμματίου συναρτήσει της παρούσας αξίας του (ο έμπορος σκοπεύει να εισπράξει κατά την προεξόφληση του τη μισή αξία του εμπορεύματος), θα πρέπει να στον προαναφερόμενο τύπο του εξωτερικού προεξοφλήματος να εκφράσουμε το προεξόφλημα συναρτήσει της παρούσας αξίας, θέτοντας όπου $K=A+E$, , διότι η ονομαστική αξία είναι ίση με το ποσό που εισπράττεται στην προεξόφληση (A) συν τον τόκο που παρακρατείται από την τράπεζα (E). Τότε θα έχουμε:

$$E = \frac{(A + E) \cdot v}{\Delta} \Rightarrow E = \frac{A \cdot v + E \cdot v}{\Delta} \Rightarrow E \cdot \Delta = A \cdot v + E \cdot v \Rightarrow E \cdot \Delta - E \cdot v = A \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \cdot (\Delta - v) = A \cdot v \Rightarrow E = \frac{A \cdot v}{\Delta - v}$$

Για την εφαρμογή του παραπάνω τύπου, καταρχήν υπολογίζουμε τις ημέρες προεξόφλησης όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Μήνες	Μάρτιος	Απρίλιος	Σύνολο ημερών
Ημέρες	30-14=16	30	46

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον διαιρέτη Δ , δηλαδή:

$$\Delta = \frac{360}{i} = \frac{360}{0,10} = 3.600$$

Ακολουθώντας για τον υπολογισμό του προεξοφλήματος θα εφαρμοσθεί ο προαναφερόμενος τύπος, δηλαδή:

$$E = \frac{A \cdot v}{\Delta - v} = \frac{2.500 \cdot 46}{3.600 - 46} = 32,36\text{€}$$

Άρα η ονομαστική αξία του εν λόγω γραμματίου θα είναι:

$$K = A + E = 2.500 + 32,36 = 2.532,36\text{€}.$$

2) Υπολογισμός του προεξοφλήματος E και της ονομαστικής K του γραμματίου που έχει λήξη στις 30/6 με εξωτερική προεξόφληση.

Ομοίως όπως και προηγουμένως θα εφαρμόσουμε τον ίδιο τύπο.

Καταρχήν υπολογίζουμε τις ημέρες προεξόφλησης όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Μήνες	Μάρτιος	Απρίλιος	Μάιος	Ιούνιος	Σύνολο ημερών
Ημέρες	30-14=16	30	30	30	106

Ισχύει ο ίδιος διαιρέτης όπως και προηγουμένως, $\Delta = 3.600$

Ακολουθώντας για τον υπολογισμό του προεξοφλήματος θα εφαρμοσθεί ο προαναφερόμενος τύπος, δηλαδή:

$$E = \frac{A \cdot v}{\Delta - v} = \frac{2.500 \cdot 106}{3.600 - 106} = 75,84\text{€}$$

Άρα η ονομαστική αξία του εν λόγω γραμματίου θα είναι:

$$K = A + E = 2.500 + 75,84 = 2.575,84\text{€}.$$

3) Υπολογισμός του προεξοφλήματος E και της ονομαστικής K του γραμματίου που έχει λήξη στις 30/4 με εσωτερική προεξόφληση.

Επειδή μας ζητείται να υπολογίσουμε το προεξόφλημα και την ονομαστική αξία του γραμματίου συναρτήσει της παρούσας αξίας του, θα εφαρμοσθεί απευθείας ο βασικός τύπος του εσωτερικού προεξοφλήματος:

$$E = \frac{A \cdot v}{\Delta}$$

Ισχύουν οι 46 ημέρες προεξόφλησης και $\Delta=3.600$

Άρα το προεξόφλημα θα είναι:

$$E = \frac{A \cdot v}{\Delta} = \frac{2.500 \cdot 46}{3.600} = 31,94\text{€}$$

Επομένως η ονομαστική αξία του εν λόγω γραμματίου θα είναι:

$$K=A+E=2.500+31,94=2.531,94\text{€}.$$

4) Υπολογισμός του προεξοφλήματος E και της ονομαστικής K του γραμματίου που έχει λήξη στις 30/6 με εσωτερική προεξόφληση.

Ομοίως όπως και προηγουμένως εφαρμόζεται ο ίδιος τύπος.

Ισχύουν οι 106 ημέρες προεξόφλησης και $\Delta=3.600$

Άρα το προεξόφλημα θα είναι:

$$E = \frac{A \cdot v}{\Delta} = \frac{2.500 \cdot 106}{3.600} = 73,61\text{€}$$

Επομένως η ονομαστική αξία του εν λόγω γραμματίου θα είναι:

$$K=A+E=2.500+73,61=2.573,61\text{€}.$$

Παράδειγμα 2

Ένας έμπορος πούλησε επί πιστώσει σε ένα πελάτη του εμπορεύματα αξίας 1.000€. Συμφώνησαν μεταξύ τους να εκδώσει ο πρώτος στο δεύτερο δυο γραμμάτια με αντίστοιχες λήξεις στις 30/5 και 30/8. Με δεδομένο ότι, ο έμπορος σκοπεύει να προεξοφλήσει στις 20/3 σε τράπεζα τα δυο γραμμάτια και να λάβει κατά την προεξόφληση του καθενός τη μισή αξία του εμπορεύματος που πούλησε, να υπολογισθούν οι ονομαστικές αξίες που αναγράφονται στα δυο γραμμάτια και με τις δυο μεθόδους προεξόφλησης. Να ληφθεί υπόψη ότι, η τράπεζα εφαρμόζει επιτόκιο προεξόφλησης 8% και εμπορικό έτος.

Λύση

1) Υπολογισμός της ονομαστικής K του γραμματίου που έχει λήξη στις 30/5 με εξωτερική προεξόφληση.

Ξεκινάμε με το βασικό τύπο του εξωτερικού προεξοφλήματος:

$$E = \frac{K \cdot v}{\Delta}$$

Επειδή μας ζητείται να υπολογίσουμε την ονομαστική αξία του γραμματίου συναρτήσει της παρούσας αξίας του (ο έμπορος σκοπεύει να εισπράξει κατά την

προεξόφληση του τη μισή αξία του εμπορεύματος), θα πρέπει αρχικά να στον προαναφερόμενο τύπο του εξωτερικού προεξοφλήματος να εκφράσουμε το προεξόφλημα συναρτήσει της παρούσας αξίας, θέτοντας όπου $K=A+E$, δηλαδή:

$$E = \frac{(A + E) \cdot v}{\Delta} \Rightarrow E = \frac{A \cdot v + E \cdot v}{\Delta} \Rightarrow E \cdot \Delta = A \cdot v + E \cdot v \Rightarrow E \cdot \Delta - E \cdot v = A \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \cdot (\Delta - v) = A \cdot v \Rightarrow E = \frac{A \cdot v}{\Delta - v}$$

Στην συνέχεια προκειμένου να εξάγουμε τον τύπο που υπολογίζει την ονομαστική αξία του γραμματίου, επειδή η ονομαστική αξία είναι ίση με το ποσό που εισπράττεται στην προεξόφληση (A) συν τον τόκο που παρακρατείται από την τράπεζα (E), θα ισχύει: $K=A+E$. Αν θέσουμε στη σχέση αυτή στη θέση του E τον προαναφερόμενο τύπο, τότε θα έχουμε:

$$K = A + E \Rightarrow K = A + \frac{A \cdot v}{\Delta - v} \Rightarrow K = \frac{A \cdot (\Delta - v) + A \cdot v}{\Delta - v} \Rightarrow K = \frac{A \cdot \Delta}{\Delta - v}$$

Για την εφαρμογή του παραπάνω τύπου, καταρχήν υπολογίζουμε τις ημέρες προεξόφλησης όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Μήνες	Μάρτιος	Απρίλιος	Μάιος	Σύνολο ημερών
Ημέρες	30-19=11	30	30	71

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον διαιρέτη Δ, δηλαδή:

$$\Delta = \frac{360}{i} = \frac{360}{0,08} = 4.500$$

Ακολουθως για τον υπολογισμό της ονομαστικής αξίας θα εφαρμοσθεί ο προαναφερόμενος τύπος, δηλαδή:

$$K = \frac{A \cdot \Delta}{\Delta - v} = \frac{500 \cdot 4.500}{4.500 - 71} = 508,02\text{€}$$

2) Υπολογισμός της ονομαστικής K του γραμματίου που έχει λήξη στις 30/8 με εξωτερική προεξόφληση.

Ομοίως όπως και προηγουμένως θα εφαρμοσθεί ο προαναφερόμενος τύπος.

Καταρχήν υπολογίζουμε τις ημέρες προεξόφλησης όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Μήνες	Μάρτιος	Απρίλιος	Μάιος	Ιούνιος	Ιούλιος	Αύγουστος	Σύνολο ημερών
Ημέρες	30-19=11	30	30	30	30	30	161

Ισχύει $\Delta=4.500$

Ακολουθως για τον υπολογισμό της ονομαστικής αξίας θα έχουμε:

$$K = \frac{A \cdot \Delta}{\Delta - v} = \frac{500 \cdot 4.500}{4.500 - 161} = 518,55\text{€}$$

3) Υπολογισμός της ονομαστικής K του γραμματίου που έχει λήξη στις 30/5 με εσωτερική προεξόφληση.

Ξεκινάμε με το βασικό τύπο του εσωτερικού προεξοφλήματος:

$$E = \frac{A \cdot v}{\Delta}$$

Στην συνέχεια προκειμένου να εξαγάγουμε τον τύπο που υπολογίζει την ονομαστική αξία του γραμματίου, επειδή η ονομαστική αξία είναι ίση με το ποσό που εισπράττεται στην προεξόφληση (A) συν τον τόκο που παρακρατείται από την τράπεζα (E), θα ισχύει: $K=A+E$. Αν θέσουμε στη σχέση αυτή στη θέση του E τον προαναφερόμενο τύπο, τότε θα έχουμε:

$$K = A + E \Rightarrow K = A + \frac{A \cdot v}{\Delta} \Rightarrow K = \frac{A \cdot \Delta + A \cdot v}{\Delta} \Rightarrow K = \frac{A \cdot (\Delta + v)}{\Delta}$$

Ισχύουν 71 ημέρες προεξόφλησης και $\Delta=4.500$

Ακολουθως για τον υπολογισμό της ονομαστικής αξίας θα έχουμε:

$$K = \frac{A \cdot (\Delta + v)}{\Delta} = \frac{500 \cdot (4.500 + 71)}{4.500} = 507,89\text{€}$$

4) Υπολογισμός της ονομαστικής K του γραμματίου που έχει λήξη στις 30/8 με εσωτερική προεξόφληση.

Ομοίως όπως και προηγουμένως θα εφαρμόσουμε τον ίδιο τύπο.

Ισχύουν 161 ημέρες προεξόφλησης και $\Delta=4.500$

Ακολουθως για τον υπολογισμό της ονομαστικής αξίας θα εφαρμοσθεί ο τύπος που το υπολογίζει συναρτήσει της παρούσας αξίας, δηλαδή:

$$K = \frac{A \cdot (\Delta + v)}{\Delta} = \frac{500 \cdot (4.500 + 161)}{4.500} = 517,89\text{€}$$

Παράδειγμα 3

Ένας έμπορος πούλησε επί πιστώσει σε ένα πελάτη ένα εμπόρευμα και για το λόγο αυτό έκδωσε δύο γραμμάτια ονομαστικών αξιών 400€ και 600€ με λήξεις στις 30/7 και 25/8 αντίστοιχα. Με δεδομένο ότι ο έμπορος θα προεξοφλήσει και τα δύο γραμμάτια σε τράπεζα στις 18/3, να υπολογισθεί η αξία του εμπορεύματος λαμβάνοντας υπόψη και τις δυο μεθόδους προεξόφλησης. Να ληφθεί επίσης υπόψη ότι, η τράπεζα εφαρμόζει επιτόκιο προεξόφλησης 6% και εμπορικό έτος.

Λύση

Θεωρούμε ότι, τα ποσά που θα εισπράξει ο έμπορος κατά την προεξόφληση των δύο γραμματίων αποτελούν αθροιζόμενα την αξία του εμπορεύματος. Επομένως θα πρέπει να υπολογισθούν οι παρούσες αξίες των δύο γραμματίων, όπως ακολουθεί:

α) Υπολογισμός των παρούσων αξιών με εξωτερική προεξόφληση

α1) Υπολογισμός της παρούσας αξίας του πρώτου γραμματίου

Ξεκινάμε με το βασικό τύπο του εξωτερικού προεξοφλήματος:

$$E = \frac{K \cdot v}{\Delta}$$

Στην συνέχεια προκειμένου να εξάγουμε τον τύπο που υπολογίζει την παρούσα αξία του γραμματίου, επειδή η παρούσα αξία, το ποσό που εισπράττεται στην προεξόφληση (A), είναι ίση με την ονομαστική αξία μείον τον τόκο που παρακρατείται από την τράπεζα (E), θα ισχύει: $A=K-E$. Αν θέσουμε στη σχέση αυτή στη θέση του E τον προαναφερόμενο τύπο, τότε θα έχουμε:

$$A = K - E \Rightarrow A = K - \frac{K \cdot v}{\Delta} \Rightarrow A = \frac{K \cdot \Delta - K \cdot v}{\Delta} \Rightarrow A = \frac{K \cdot (\Delta - v)}{\Delta}$$

Για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας, καταρχήν υπολογίζουμε τις ημέρες προεξόφλησης όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Μήνες	Μάρτιος	Απρίλιος	Μάιος	Ιούνιος	Ιούλιος	Σύνολο ημερών
Ημέρες	30-17=13	30	30	30	30	133

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το διαιρέτη Δ , δηλαδή:

$$\Delta = \frac{360}{i} = \frac{360}{0,06} = 6.000$$

Ακολούθως η παρούσα αξία με εφαρμογή του προαναφερόμενου τύπου θα είναι:

$$A = \frac{K \cdot (\Delta - v)}{\Delta} = \frac{400 \cdot (6.000 - 133)}{6.000} = 391,13\text{€}$$

a2) Υπολογισμός της παρούσας αξίας του δεύτερου γραμματίου

Ομοίως όπως και προηγουμένως θα εφαρμόσουμε τον προαναφερόμενο τύπο.

Καταρχήν υπολογίζουμε τις ημέρες προεξόφλησης όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Μήνες	Μάρτιος	Απρίλιος	Μάιος	Ιούνιος	Ιούλιος	Αύγουστος	Σύνολο ημερών
Ημέρες	30-17=13	30	30	30	30	25	158

Ισχύει $\Delta=6.000$

Ακολούθως για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας θα εφαρμοσθεί όπως και προηγουμένως ο τύπος που το υπολογίζει συναρτήσει της ονομαστικής αξίας, δηλαδή:

$$A = \frac{K \cdot (\Delta - v)}{\Delta} = \frac{600 \cdot (6.000 - 158)}{6.000} = 584,20\text{€}$$

Άρα η αξία του εμπορεύματος είναι το άθροισμα των δύο παρουσών αξιών όπως προαναφέραμε, δηλαδή $391,13+584,20=975,33\text{€}$

β) Υπολογισμός των παρουσών αξιών με εσωτερική προεξόφληση

β1) Υπολογισμός της παρούσας αξίας του πρώτου γραμματίου

Ξεκινάμε με το βασικό τύπο του εσωτερικού προεξοφλήματος:

$$E = \frac{A \cdot v}{\Delta}$$

Επειδή μας ζητείται να υπολογίσουμε την παρούσα αξία του γραμματίου συναρτήσει της ονομαστικής αξίας του (ο έμπορος σκοπεύει να εισπράξει κατά την προεξόφληση του τη μισή αξία του εμπορεύματος), θα πρέπει αρχικά στον προαναφερόμενο τύπο του εσωτερικού προεξοφλήματος να εκφράσουμε το προεξόφλημα συναρτήσει της ονομαστικής αξίας, θέτοντας όπου $A=K-E$, δηλαδή:

$$E = \frac{(K - E) \cdot v}{\Delta} \Rightarrow E = \frac{K \cdot v - E \cdot v}{\Delta} \Rightarrow E \cdot \Delta = K \cdot v - E \cdot v \Rightarrow E \cdot \Delta + E \cdot v = K \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \cdot (\Delta + v) = K \cdot v \Rightarrow E = \frac{K \cdot v}{\Delta + v}$$

Στην συνέχεια προκειμένου να εξάγουμε τον τύπο που υπολογίζει την παρούσα αξία του γραμματίου, επειδή η παρούσα αξία, το ποσό που εισπράττεται στην προεξόφληση (A), είναι ίση με την ονομαστική αξία μείον τον τόκο που παρακρατείται από την τράπεζα (E), θα ισχύει: $A=K-E$. Αν θέσουμε στη σχέση αυτή στη θέση του E τον προαναφερόμενο τύπο, τότε θα έχουμε:

$$A = K - E \Rightarrow A = K - \frac{K \cdot v}{\Delta + v} \Rightarrow A = \frac{K \cdot (\Delta + v) - K \cdot v}{\Delta + v} \Rightarrow A = \frac{K \cdot \Delta}{\Delta + v}$$

Ισχύουν ημέρες προεξόφλησης 133 και $\Delta=6.000$

Για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας θα εφαρμοσθεί ο προαναφερόμενος τύπος, δηλαδή:

$$A = \frac{K \cdot \Delta}{\Delta + v} = \frac{400 \cdot 6.000}{6.000 + 133} = 391,33$$

β2) Υπολογισμός της παρούσας αξίας του πρώτου γραμματίου

Ομοίως όπως και προηγουμένως θα εφαρμοσθεί ο ίδιος τύπος.

Ισχύουν ημέρες προεξόφλησης 158 και $\Delta=6.000$

Για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας θα εφαρμοσθεί όπως και προηγουμένως ο τύπος που το υπολογίζει συναρτήσει της ονομαστικής αξίας, δηλαδή:

$$A = \frac{K \cdot \Delta}{\Delta + v} = \frac{600 \cdot 6.000}{6.000 + 158} = 584,61$$

Άρα η αξία του εμπορεύματος είναι το άθροισμα των δύο παρουσών αξιών όπως προαναφέραμε, δηλαδή $391,33+584,61=975,94\text{€}$

Παράδειγμα 4

Ένας έμπορος πούλησε επί πιστώσει σε ένα πελάτη ένα εμπόρευμα αξίας 500€. Για το λόγο αυτό έκδωσε ένα γραμμάτιο ονοματικής αξίας μεγαλύτερης κατά 20€ από την αξία του εμπορεύματος. Ποια ημερομηνία λήξης πρέπει να έχει το γραμμάτιο, ώστε αν ο έμπορος το προεξοφλήσει σε τράπεζα στις 18/3 να εισπράξει την αξία του εμπορεύματος. Να υπολογισθεί η ημερομηνία λήξης του γραμματίου, λαμβάνοντας υπόψη και τις δυο μεθόδους προεξόφλησης. Να ληφθεί επίσης υπόψη ότι, η τράπεζα εφαρμόζει επιτόκιο προεξόφλησης 9% και εμπορικό έτος.

Λύση

1) Υπολογισμός της ημερομηνίας λήξης του γραμματίου με εξωτερική προεξόφληση.

Ξεκινάμε με τον βασικό τύπο του εξωτερικού προεξοφλήματος:

$$E = \frac{K \cdot v}{\Delta}$$

Επειδή μας ζητείται να υπολογίσουμε την ημερομηνία λήξης του γραμματίου, δηλαδή τις ημέρες προεξόφλησης του, συναρτήσουμε της παρούσας αξίας του (ο έμπορος σκοπεύει να εισπράξει κατά την προεξόφληση του την αξία του εμπορεύματος), θα πρέπει αρχικά στον προαναφερόμενο τύπο του εξωτερικού προεξοφλήματος να εκφράσουμε το προεξόφλημα συναρτηθεί της παρούσας αξίας, θέτοντας όπου $K=A+E$, δηλαδή:

$$E = \frac{(A + E) \cdot v}{\Delta} \Rightarrow E = \frac{A \cdot v + E \cdot v}{\Delta} \Rightarrow E \cdot \Delta = A \cdot v + E \cdot v \Rightarrow E \cdot \Delta - E \cdot v = A \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \cdot (\Delta - v) = A \cdot v \Rightarrow E = \frac{A \cdot v}{\Delta - v}$$

Στην συνέχεια προκειμένου να εξαγάγουμε τον τύπο που υπολογίζει τις ημέρες προεξόφλησης του γραμματίου, επιλύουμε τον προαναφερόμενο τύπο ως προς v και θα έχουμε:

$$E = \frac{A \cdot v}{\Delta - v} \Rightarrow E \cdot (\Delta - v) = A \cdot v \Rightarrow E \cdot \Delta - E \cdot v = A \cdot v \Rightarrow E \cdot \Delta = E \cdot v + A \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \cdot \Delta = v(E + A) \Rightarrow v = \frac{E \cdot \Delta}{E + A}$$

Πριν την εφαρμογή του παραπάνω τύπου υπολογίζουμε το προεξόφλημα E από τη γνωστή σχέση $E=K-A \Rightarrow E=520-500=20$

Επίσης υπολογίζεται ο διαιρέτης Δ :

$$\Delta = \frac{360}{i} = \frac{360}{0,09} = 4.000$$

Άρα οι ημέρες προεξόφλησης θα είναι:

$$v = \frac{20 \cdot 4.000}{20 + 500} = 153,85 \cong 154$$

Επομένως η ημερομηνία λήξης βρίσκεται, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Μήνες	Μάρτιος	Απρίλιος	Μάιος	Ιούνιος	Ιούλιος	Αύγουστος	Σύνολο ημερών
Ημέρες	30-17=13	30	30	30	30	> 21	154

Ημερομηνία Λήξης: 21/8

2) Υπολογισμός της ημερομηνίας λήξης του γραμματίου με εσωτερική προεξόφληση.

Ξεκινάμε με τον βασικό τύπο του εσωτερικού προεξοφλήματος:

$$E = \frac{A \cdot v}{\Delta}$$

Επειδή μας ζητείται να υπολογίσουμε την ημερομηνία λήξης του γραμματίου, δηλαδή τις ημέρες προεξόφλησης του συναρτήσεως της παρούσας αξίας του, θα πρέπει να εξάγουμε τον τύπο που υπολογίζει τις ημέρες προεξόφλησης του γραμματίου, αν επιλύουμε απευθείας τον προαναφερόμενο τύπο ως προς v . Θα έχουμε:

$$E = \frac{A \cdot v}{\Delta} \Rightarrow E \cdot \Delta = A \cdot v \Rightarrow v = \frac{E \cdot \Delta}{A}$$

Ισχύουν όπως προηγουμένως $E=20$ και $\Delta=4000$

Άρα οι ημέρες προεξόφλησης θα είναι:

$$v = \frac{20 \cdot 4.000}{500} = 160$$

Επομένως η ημερομηνία λήξης βρίσκεται, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Μήνες	Μάρτιος	Απρίλιος	Μάιος	Ιούνιος	Ιούλιος	Αύγουστος	Σύνολο ημερών
Ημέρες	30-17=13	30	30	30	30	> 27	154

Ημερομηνία Λήξης: 27/8

3. Αντικατάσταση συναλλαγματικών εις διαταγή (γραμματίων)

Όπως έχουμε προαναφέρει στις προεξοφλήσεις γραμματίων, υπάρχουν περιπτώσεις που ο εκδότης γραμματίων (πωλητής) δεν προεξοφλεί τα γραμμάτια που του οφείλουν οι πελάτες του, αλλά τα κρατά και περιμένει να εξοφληθούν από τους οφειλέτες τους όταν λήγουν. Σε τέτοιες περιπτώσεις συμβαίνει πολλές φορές οι οφειλέτες γραμματίων να ζητήσουν, προκειμένου να διευκολυνθούν, την αντικατάσταση των γραμματίων που ήδη οφείλουν με νέα γραμμάτια.

Η αντικατάσταση των γραμματίων στηρίζεται στην αρχή της **οικονομικής ισοδυναμίας**. Δηλαδή τα αντικαθιστάμενα γραμμάτια πρέπει να είναι οικονομικώς ισοδύναμα με αυτά που τα αντικαθιστούν. Για να επιτευχθεί αυτό πρέπει, το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων να ισούται με το άθροισμα των παρουσών αξιών των νέων γραμματίων, **σε ορισμένη χρονική στιγμή και με το ίδιο επιτόκιο**.

Η χρονική στιγμή κατά την οποία το άθροισμα των παρουσών αξιών των αντικαθιστάμενων γραμματίων είναι ίσο με το άθροισμα των παρουσών αξιών των νέων γραμματίων, ονομάζεται **εποχή ισοδυναμίας**.

Συνήθως ως εποχή ισοδυναμίας λαμβάνεται η **ημέρα υπολογισμού**, δηλαδή η ημέρα κατά την οποία γίνεται η αντικατάσταση των γραμματίων. Στις περιπτώσεις όμως που αντικαθίστανται πολλά γραμμάτια με ένα νέο μόνο, ή που αντικαθίσταται ένα γραμμάτιο με πολλά νέα, τότε είναι πιθανόν ως εποχή ισοδυναμίας να ληφθεί η ημέρα λήξης του ενός γραμματίου είτε του νέου που αντικαθιστά τα πολλά γραμμάτια, είτε αυτού που έχει ήδη εκδοθεί και αντικαθίσταται με πολλά νέα γραμμάτια. Σε αυτές τις περιπτώσεις ως εποχή ισοδυναμίας λαμβάνεται η **κοινή λήξη** δηλ. η ημέρα λήξης του ενός γραμματίου.

3.1 Χρήσιμοι τύποι επίλυσης προβλημάτων αντικατάστασης γραμματίων.

Σύμφωνα με την προαναφερόμενη αρχή της οικονομικής ισοδυναμίας ισχύει:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = A'_1 + A'_2 + \dots + A'_n \quad (1)$$

όπου:

A_1, A_2, \dots, A_n : οι παρούσες αξίες των γραμματίων που αντικαθίστανται.

A'_1, A'_2, \dots, A'_n : οι παρούσες αξίες των νέων γραμματίων.

Η παραπάνω σχέση επεξεργάζεται περαιτέρω ως εξής:

$$K_1 \pm E_1 + K_2 \pm E_2 + \dots + K_n \pm E_n = K'_1 \pm E'_1 + K'_2 \pm E'_2 + \dots + K'_n \pm E'_n \quad (2)$$

Δηλαδή η παρούσα αξία ενός γραμματίου θα είναι ίση με τη διαφορά της ονομαστικής αξίας του και του προεξοφλήματος του, όταν η ημέρα λήξης του είναι **μεταγενέστερη χρονικά** της ημέρας αντικατάστασης. Όταν όμως η ημέρα λήξης ενός γραμματίου είναι **προγενέστερη χρονικά** της ημέρας αντικατάστασης, τότε η παρούσα αξία του θα είναι ίση με το άθροισμα της ονομαστικής αξίας του και του προεξοφλήματος του, διότι όπως είναι ευνόητο η αξία του σε μεταγενέστερη χρονική στιγμή θα είναι μεγαλύτερη από την αξία που έχει όταν λήγει σε προηγούμενη χρονική στιγμή.

Επομένως όταν εφαρμόζουμε την παραπάνω σχέση (2), θα επιλέγουμε το + ή το - πριν από το προεξόφλημα (E), ανάλογα αν η λήξη του γραμματίου είναι πριν ή μετά από την ημέρα αντικατάστασης.

Παράδειγμα 1

Έστω ότι ένας έμπορος είχε εκδώσει σε πελάτη του δύο γραμμάτια $K_1=300\text{€}$ και $K_2=400\text{€}$ με αντίστοιχες λήξεις την 13/5 και 20/7. Οι προαναφερόμενοι συμφώνησαν σήμερα (π.χ. 15/3) προς διευκόλυνση του δευτέρου, να αντικαταστήσουν τα γραμμάτια αυτά με δυο νέα γραμμάτια με αντίστοιχες λήξεις την 1/9 και 20/11, εκ των οποίων το δεύτερο θα έχει διπλάσια ονομαστική αξία από το πρώτο. Αν ισχύει επιτόκιο προεξόφλησης 10% και εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού, ζητείται να υπολογισθούν οι ονομαστικές αξίες των νέων γραμματίων α) εξωτερικώς και β) εσωτερικώς.

Λύση

Αφού ως εποχή ισοδυναμίας λαμβάνεται η ημέρα υπολογισμού, τότε αυτή είναι η 13/5. παρατηρούμε ότι οι λήξεις όλων των γραμματίων παλιών και νέων είναι μετά από αυτή την ημερομηνία. Άρα οι παρούσες αξίες τους αυτή την ημέρα είναι ίσες με τη διαφορά των ονομαστικών αξιών τους με τα προεξοφλήματα τους. Επομένως η προαναφερόμενη σχέση (2) γίνεται:

$$K_1 - E_1 + K_2 - E_2 = K'_1 - E'_1 + K'_2 - E'_2 \quad (1)$$

α) Υπολογισμός με εξωτερική προεξόφληση

Στην συνέχεια επεξεργαζόμαστε την παραπάνω σχέση (1), θέτοντας στη θέση του E το γνωστό τύπο που εξ' ορισμού το συσχετίζει με την ονομαστική αξία, δηλαδή:

$$E = \frac{K \cdot v}{\Delta}$$

Οπότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται ως εξής:

$$K_1 - \frac{K_1 v_1}{\Delta} + K_2 - \frac{K_2 v_2}{\Delta} = K'_1 - \frac{K'_1 v'_1}{\Delta} + K'_2 - \frac{K'_2 v'_2}{\Delta} \Rightarrow$$

$$K_1 \left(1 - \frac{v_1}{\Delta}\right) + K_2 \left(1 - \frac{v_2}{\Delta}\right) = K'_1 \left(1 - \frac{v'_1}{\Delta}\right) + K'_2 \left(1 - \frac{v'_2}{\Delta}\right) \quad (2)$$

Αυτή τη σχέση θα λύσουμε ως προς K'_1, K'_2 , λαμβάνοντας υπόψη ότι $K'_2 = 2K'_1$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε στον παρακάτω πίνακα τις ημέρες αντικατάστασης (v) του κάθε γραμματίου, δηλαδή τις ημέρες που περιλαμβάνονται μεταξύ της ημέρας αντικατάστασης και της ημέρας λήξης του καθενός.

	K_1	K_2	K'_1	K'_2
M	HM	HM	HM	M
3	30-14=16	30-14=16	30-14=16	30-14=16
4	30	30	30	30
5	13	30	30	30
6		30	30	30
7		20	30	30
8			30	30
9			1	30
10				30
11				20
Σ	59	126	167	246

Ακολουθως αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση (2) τις ημέρες αντικατάστασης των γραμματίων, τις ονομαστικές αξίες των παλιών γραμματίων καθώς και όπου $\Delta=360/0,1=3.600$. Θα έχουμε:

$$300\left(1 - \frac{59}{3600}\right) + 400\left(1 - \frac{126}{3600}\right) = K'_1\left(1 - \frac{167}{3600}\right) + K'_2\left(1 - \frac{246}{3600}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow 295,08 + 386 = K'_1 \cdot 0,9536 + K'_2 \cdot 0,9317(3)$$

Είναι γνωστό από τα δεδομένα ότι $K'_2 = 2K'_1$

Επομένως από την (3) θα έχουμε:

$$681,08 = K'_1 \cdot 0,9536 + 2K'_1 \cdot 0,9317 \Rightarrow 681,08 = K'_1(0,9536 + 2 \cdot 0,9317) \Rightarrow$$

$$681,08 = K'_1 \cdot 2,8169 \Rightarrow K'_1 = 241,78\text{€}$$

$$\text{Άρα } K'_2 = 2 \times 241,78 = 483,56\text{€}$$

β) Υπολογισμός με εσωτερική προεξόφληση

Όπως και προηγουμένως επεξεργαζόμαστε την παραπάνω σχέση (1), θέτοντας στη θέση του E το γνωστό τύπο που εξ' ορισμού το συσχετίζει με την παρούσα αξία, δηλαδή $E = \frac{Kv}{\Delta}$, και στην συνέχεια τον επεξεργαζόμαστε για να τον συσχετίσουμε με την ονομαστική αξία, δηλαδή:

$$E = \frac{Av}{\Delta} \Rightarrow E = \frac{(K - E)v}{\Delta} \Rightarrow E = \frac{Kv - Ev}{\Delta} \Rightarrow E\Delta = Kv - Ev \Rightarrow E\Delta + Ev = Kv \Rightarrow E = \frac{Kv}{\Delta + v}$$

Οπότε η παραπάνω σχέση (1) μετατρέπεται ως εξής:

$$K_1 - \frac{K_1v_1}{\Delta + v_1} + K_2 - \frac{K_2v_2}{\Delta + v_2} = K'_1 - \frac{K'_1v'_1}{\Delta + v'_1} + K'_2 - \frac{K'_2v'_2}{\Delta + v'_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1\left(1 - \frac{v_1}{\Delta + v_1}\right) + K_2\left(1 - \frac{v_2}{\Delta + v_2}\right) = K'_1\left(1 - \frac{v'_1}{\Delta + v'_1}\right) + K'_2\left(1 - \frac{v'_2}{\Delta + v'_2}\right)(2)$$

Αυτή τη σχέση θα λύσουμε ως προς K'_1, K'_2 , λαμβάνοντας υπόψη ότι $K'_2 = 2K'_1$

Ακολουθως αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση (2) τις ημέρες αντικατάστασης των γραμματίων που έχουμε υπολογίσει παραπάνω, τις ονομαστικές αξίες των παλιών γραμματίων καθώς και όπου $\Delta=360/0,1=3.600$. Θα έχουμε:

$$300\left(1 - \frac{59}{3600 + 59}\right) + 400\left(1 - \frac{126}{3600 + 126}\right) = K'_1\left(1 - \frac{167}{3600 + 167}\right) + K'_2\left(1 - \frac{246}{3600 + 246}\right) \\ \Rightarrow 295,16 + 386,47 = K'_1 \cdot 0,9557 + K'_2 \cdot 0,9360(3)$$

Είναι γνωστό από τα δεδομένα ότι $K'_2 = 2K'_1$

Επομένως από την (3) θα έχουμε:

$$\Rightarrow 681,64 = K'_1(0,9557 + 2 \cdot 0,9360) \Rightarrow K'_1 = 241,05\text{€}$$

$$\text{Άρα } K'_2 = 2 \times 241,05 = 482,11\text{€}$$

Παράδειγμα 2

Έστω ότι ένας έμπορος έχει εκδώσει σε πελάτη του τρία γραμμάτια $K_1=600\text{€}$, $K_2=700\text{€}$ και $K_3=900\text{€}$ με αντίστοιχες λήξεις την 19/5 και 29/6 και 12/7. Οι προαναφερόμενοι συμφώνησαν σήμερα προς διευκόλυνση του δεύτερου, να αντικαταστήσουν τα γραμμάτια αυτά με ένα νέο γραμμάτιο με λήξη την 9/9. Αν ισχύει επιτόκιο προεξόφλησης 10% και εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη, ζητείται να υπολογισθεί η ονομαστική αξία του νέου γραμματίου α) εξωτερικώς και β) εσωτερικώς.

Λύση

Αφού ως εποχή ισοδυναμίας λαμβάνεται η κοινή λήξη, τότε αυτή είναι η 9/9, δηλαδή του ενός γραμματίου που αντικαθιστά τα παλιά. Παρατηρούμε ότι οι λήξεις των παλιών γραμματίων είναι πριν από αυτή την ημερομηνία. Άρα οι παρούσες αξίες τους αυτή την ημέρα είναι ίσες με το άθροισμα των ονομαστικών αξιών τους με τα προεξοφλήματα τους, η δε παρούσα αξία του νέου γραμματίου ταυτίζεται με την ονομαστική αξία του. Επομένως η προαναφερόμενη σχέση (2) γίνεται:

$$K_1 + E_1 + K_2 + E_2 + K_3 + E_3 = K'_1(1)$$

α) Υπολογισμός με εξωτερική προεξόφληση

Στην συνέχεια επεξεργαζόμαστε την παραπάνω σχέση, θέτοντας στη θέση του E το γνωστό τύπο που το συσχετίζει με την ονομαστική αξία, δηλαδή $E = \frac{K \cdot v}{\Delta}$.

Οπότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται ως εξής:

$$K_1 + \frac{K_1 v_1}{\Delta} + K_2 + \frac{K_2 v_2}{\Delta} + K_3 + \frac{K_3 v_3}{\Delta} = K \Rightarrow K_1 \left(1 + \frac{v_1}{\Delta}\right) + K_2 \left(1 + \frac{v_2}{\Delta}\right) + K_3 \left(1 + \frac{v_3}{\Delta}\right) = K(2)$$

Αυτή τη σχέση θα λύσουμε ως προς K .

Στην συνέχεια υπολογίζουμε στον παρακάτω πίνακα τις ημέρες αντικατάστασης (v) του κάθε γραμματίου, δηλαδή τις ημέρες που περιλαμβάνονται μεταξύ της ημέρας αντικατάστασης και της ημέρας λήξης του καθενός.

	K_1	K_2	K_2
M	HM	HM	HM
5	30-18=12	0	0
6	30	30-28=2	0
7	30	30	30-11=19
8	30	30	30
9	9	9	9
Σ	111	71	58

Ακολουθώντας αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση (2) τις ημέρες αντικατάστασης των γραμματίων, τις ονομαστικές αξίες των παλιών γραμματίων καθώς και όπου $\Delta=360/0,1=3.600$. Θα έχουμε:

$$600 \left(1 + \frac{111}{3600}\right) + 700 \left(1 + \frac{71}{3600}\right) + 900 \left(1 + \frac{58}{3600}\right) = K \Rightarrow K = 2.246,81\text{€}$$

β) Υπολογισμός με εσωτερική προεξόφληση

Όπως και προηγουμένως επεξεργαζόμαστε την παραπάνω σχέση (1), θέτοντας στη θέση του E το γνωστό τύπο που εξ' ορισμού το συσχετίζει με την παρούσα αξία, δηλαδή $E = \frac{Kv}{\Delta}$, και στην συνέχεια τον επεξεργαζόμαστε για να τον συσχετίσουμε με την ονομαστική αξία, δηλαδή:

$$E = \frac{Av}{\Delta} \Rightarrow E = \frac{(K - E)v}{\Delta} \Rightarrow E = \frac{Kv - Ev}{\Delta} \Rightarrow E\Delta = Kv - Ev \Rightarrow E\Delta + Ev = Kv \Rightarrow E = \frac{Kv}{\Delta + v}$$

Οπότε η παραπάνω σχέση (1) μετατρέπεται ως εξής:

$$K_1 \left(1 + \frac{v_1}{\Delta + v_1}\right) + K_2 \left(1 + \frac{v_2}{\Delta + v_2}\right) + K_3 \left(1 + \frac{v_3}{\Delta + v_3}\right) = K(2)$$

Αυτή τη σχέση θα λύσουμε ως προς K .

Ακολουθώντας αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση (2) τις ημέρες αντικατάστασης των γραμματίων, τις ονομαστικές αξίες των παλιών γραμματίων καθώς και όπου $\Delta = 360/0,1 = 3.600$. Θα έχουμε:

$$600 \left(1 + \frac{111}{3600 + 111}\right) + 700 \left(1 + \frac{71}{3600 + 71}\right) + 900 \left(1 + \frac{58}{3600 + 58}\right) = K \Rightarrow \\ \Rightarrow K = 2.245,76\text{€}$$

Παράδειγμα 3

Έστω ότι ένας έμπορος έχει εκδώσει σε πελάτη του ένα γραμμάτιο $K=1.600\text{€}$ με λήξη την 5/7. Οι προαναφερόμενοι συμφώνησαν σήμερα προς διευκόλυνση του δευτέρου, να αντικαταστήσουν το γραμμάτιο αυτό με δυο νέα γραμμάτια K_1, K_2 με αντίστοιχες λήξεις την 19/6 και 29/8. Ζητείται να υπολογισθούν οι ονομαστικές αξίες των νέων γραμματίων, λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει επιτόκιο 10%, εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη και ότι η ονομαστική αξία του δεύτερου νέου γραμματίου είναι 100€ μεγαλύτερη από αυτή του πρώτου νέου γραμματίου.

Λύση

Αφού ως εποχή ισοδυναμίας λαμβάνεται η κοινή λήξη, τότε αυτή είναι η 5/7, δηλαδή του ενός γραμματίου που αντικαθιστάται από τα δυο νέα. Παρατηρούμε ότι η λήξη του πρώτου νέου γραμματίου είναι πριν από αυτή την ημερομηνία και η λήξη του δεύτερου νέου γραμματίου είναι μετά από αυτή την ημερομηνία. Άρα η παρούσα αξία του πρώτου νέου γραμματίου είναι ίση με τη διαφορά της ονομαστικής αξίας του με το προεξόφλημα του, και η παρούσα αξία του δεύτερου νέου γραμματίου είναι ίση με το άθροισμα της ονομαστικής αξίας του με το προεξόφλημα του. Επίσης η παρούσα αξία του παλιού γραμματίου ταυτίζεται με την ονομαστική αξία του. Επομένως η προαναφερόμενη σχέση (2) γίνεται:

$$K = K_1 - E_1 + K_2 + E_2(1)$$

Στην συνέχεια επεξεργαζόμαστε την παραπάνω σχέση, θέτοντας στη θέση του E το γνωστό τύπο που το συσχετίζει με την ονομαστική αξία, δηλαδή $E = \frac{Kv}{\Delta}$.

Οπότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται ως εξής:

$$K = K_1 - \frac{K_1 v_1}{\Delta} + K_2 + \frac{K_2 v_2}{\Delta} \Rightarrow K = K_1 \left(1 - \frac{v_1}{\Delta}\right) + K_2 \left(1 + \frac{v_2}{\Delta}\right) \quad (2)$$

Αυτή τη σχέση θα λύσουμε ως προς K_1, K_2 , λαμβάνοντας υπόψη ότι $K_2 = 100 + K_1$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε στον παρακάτω πίνακα τις ημέρες αντικατάστασης (v) του κάθε γραμματίου, δηλαδή τις ημέρες που περιλαμβάνονται μεταξύ της ημέρας αντικατάστασης και της ημέρας λήξης του καθενός.

	K_1	K_2
M	HM	HM
6	30-18=12	0
7	5	30-4=26
8	0	29
Σ	17	55

Ακολουθώντας αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση (2) τις ημέρες αντικατάστασης των γραμματίων, τις ονομαστικές αξίες των παλιών γραμματίων καθώς και όπου $\Delta = 360/0,1 = 3.600$. Θα έχουμε:

$$1600 = K_1 \left(1 - \frac{17}{3600}\right) + K_2 \left(1 + \frac{55}{3600}\right) \Rightarrow 1600 = K_1 \cdot 0,9953 + K_2 \cdot 1,0153 \quad (3)$$

Είναι γνωστό από τα δεδομένα ότι $K_2 = 100 + K_1$

Επομένως από την (3) θα έχουμε:

$$1600 = K_1 \cdot 0,9953 + (K_1 + 100) \cdot 1,0153 \Rightarrow 1600 = 0,9953K_1 + 1,0153K_1 + 101,53$$

$$1600 - 101,53 = 0,9953K_1 + 1,0153K_1 \Rightarrow 1498,47 = 2,0106K_1 \Rightarrow K_1 = 745,30\text{€}$$

$$\text{Άρα } K_2 = 100 + K_1 \Rightarrow K_2 = 100 + 745,30 = 845,30$$

Παράδειγμα 4

Έστω ότι ένας έμπορος έχει εκδώσει σε πελάτη του δυο γραμμάτια ονομαστικών αξιών 200€ και 300€ με αντίστοιχες λήξεις την 19/4 και 25/6. Οι προαναφερόμενοι συμφώνησαν σήμερα προς διευκόλυνση του δευτέρου, να τα εξοφλήσει στις 28/5 μετρητοίς ο οφειλέτης τους. Ζητείται να υπολογισθεί το ποσό που θα καταβάλλει ο οφειλέτης, λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει επιτόκιο 10%, και εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη.

Λύση

Αφού ως εποχή ισοδυναμίας λαμβάνεται η κοινή λήξη, τότε αυτή είναι η 28/5, δηλαδή η ημέρα που τα δύο γραμμάτια θα εξοφληθούν μετρητοίς. Παρατηρούμε ότι η λήξη του πρώτου γραμματίου είναι πριν από αυτή την ημερομηνία και η λήξη του δεύτερου γραμματίου είναι μετά από αυτή την ημερομηνία. Άρα η παρούσα αξία του πρώτου γραμματίου είναι ίση με τη διαφορά της ονομαστικής αξίας του με το

προεξόφλημα του, και η παρούσα αξία του δευτέρου γραμματίου είναι ίση με το άθροισμα της ονομαστικής αξίας του με το προεξόφλημα του. Επομένως η προαναφερόμενη σχέση (2) γίνεται:

$$\Pi = K_1 - E_1 + K_2 + E_2 \quad (1)$$

Στην συνέχεια επεξεργαζόμαστε την παραπάνω σχέση, θέτοντας στη θέση του E το γνωστό τύπο που το συσχετίζει με την ονομαστική αξία, δηλαδή $E = \frac{Kv}{\Delta}$.

Οπότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται ως εξής:

$$\Pi = K_1 - \frac{K_1 v_1}{\Delta} + K_2 + \frac{K_2 v_2}{\Delta} \Rightarrow \Pi = K_1 \left(1 - \frac{v_1}{\Delta}\right) + K_2 \left(1 + \frac{v_2}{\Delta}\right) \quad (2)$$

Αυτή τη σχέση θα λύσουμε ως προς Π , θεωρώντας ότι το Π είναι το ποσό εξόφλησης μετρητοίς των δυο γραμματίων.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε στον παρακάτω πίνακα τις ημέρες αντικατάστασης (v) του κάθε γραμματίου, δηλαδή τις ημέρες που περιλαμβάνονται μεταξύ της ημέρας αντικατάστασης και της ημέρας λήξης του καθενός.

	K_1	K_2
M	HM	HM
4	30-18=12	0
5	28	30-27=3
6	0	25
Σ	40	28

Ακολουθώντας αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση (2) τις ημέρες αντικατάστασης των γραμματίων, τις ονομαστικές αξίες των παλιών γραμματίων καθώς και όπου $\Delta=360/0,1=3.600$. Θα έχουμε:

$$\Pi = 200 \left(1 - \frac{40}{3600}\right) + 300 \left(1 + \frac{28}{3600}\right) \Rightarrow \Pi = 500,11\text{€}$$

Παράδειγμα 5

Έστω ότι ένας έμπορος έχει εκδώσει σε πελάτη του δυο γραμμάτια ονομαστικών αξιών 100€ και 150€ με αντίστοιχες λήξεις την 9/4 και 15/6. Οι προαναφερόμενοι συμφώνησαν σήμερα προς διευκόλυνση του δευτέρου, να αντικατασταθούν στις 8/5 με ένα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας ίσης με το άθροισμα των ονομαστικών αξιών τους με ημέρα λήξης μεταγενέστερη της ημέρας αντικατάστασης. Ζητείται να υπολογισθεί η ημερομηνία λήξης του νέου γραμματίου, λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει επιτόκιο 8%, και εποχή ισοδυναμίας η ημέρα υπολογισμού.

Λύση

Αφού ως εποχή ισοδυναμίας λαμβάνεται η ημέρα υπολογισμού, τότε αυτή είναι η 8/5, δηλαδή η ημέρα που συμφωνήθηκε να γίνει η αντικατάσταση. Παρατηρούμε ότι η λήξη του πρώτου παλιού γραμματίου είναι πριν από αυτή την ημερομηνία και η λήξη του δεύτερου παλιού γραμματίου είναι μετά από αυτή την ημερομηνία. Άρα η παρούσα αξία του πρώτου παλιού γραμματίου είναι ίση με τη διαφορά της

ονομαστικής αξίας του με το προεξόφλημα του, και η παρούσα αξία του δεύτερου παλιού γραμματίου είναι ίση με το άθροισμα της ονομαστικής αξίας του με το προεξόφλημα του. Επίσης η παρούσα αξία του νέου γραμματίου είναι ίση με το άθροισμα της ονομαστικής αξίας του με το προεξόφλημα του. Επομένως η προαναφερόμενη σχέση (2) γίνεται:

$$K + E = K_1 - E_1 + K_2 + E_2 \quad (1)$$

Στην συνέχεια επεξεργαζόμαστε την παραπάνω σχέση, θέτοντας στη θέση του E το γνωστό τύπο που το συσχετίζει με την ονομαστική αξία, δηλαδή $E = \frac{Kv}{\Delta}$.

Οπότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται ως εξής:

$$K + \frac{Kv}{\Delta} = K_1 - \frac{K_1 v_1}{\Delta} + K_2 + \frac{K_2 v_2}{\Delta} \Rightarrow K \left(1 + \frac{v}{\Delta}\right) = K_1 \left(1 - \frac{v_1}{\Delta}\right) + K_2 \left(1 + \frac{v_2}{\Delta}\right) \quad (2)$$

Αυτή την σχέση θα λύσουμε ως προς v για να υπολογίσουμε τις ημέρες αντικατάστασης του νέου γραμματίου και έτσι την ημέρα λήξης του.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε στον παρακάτω πίνακα τις ημέρες αντικατάστασης (v) των δυο παλιών γραμματίων, δηλαδή τις ημέρες που περιλαμβάνονται μεταξύ της ημέρας αντικατάστασης και της ημέρας λήξης του καθενός.

	K ₁	K ₂
M	HM	HM
4	30-8=22	0
5	8	30-7=23
6	0	15
Σ	30	38

Ακολούθως αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση (2) τις ημέρες αντικατάστασης των παλιών γραμματίων, τις ονομαστικές αξίες των παλιών γραμματίων και του νέου γραμματίου καθώς και όπου $\Delta = 360/0,08 = 4500$. Θα έχουμε:

$$250 \left(1 + \frac{v}{4500}\right) = 100 \left(1 - \frac{30}{4500}\right) + 150 \left(1 + \frac{38}{4500}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 250 + \frac{250v}{4500} = 250,60 \Rightarrow \frac{250v}{4500} = 250,60 - 250 \Rightarrow$$

$$\frac{250v}{4500} = 0,60 \Rightarrow 250v = 2700 \Rightarrow v = 10,8 \cong 11$$

Άρα η λήξη του νέου γραμματίου είναι 11 ημέρες μετά την 8/5 συμπεριλαμβανομένης και αυτής, δηλαδή η 18/5.

Παράδειγμα 6

Έστω ότι ένας έμπορος έχει εκδώσει σε πελάτη του ένα γραμμάτιο $K=600\text{€}$ με λήξη την 5/5. Οι προαναφερόμενοι συμφώνησαν σήμερα προς διευκόλυνση του δευτέρου, να αντικαταστήσουν το γραμμάτιο αυτό με δυο νέα γραμμάτια με ισόποσες ονομαστικές αξίες, 20€ μικρότερες στο σύνολο τους από την ονομαστική αξία του παλιού. Ζητείται να υπολογισθούν οι ημέρες λήξης των νέων γραμματίων, λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει επιτόκιο 12%, εποχή ισοδυναμίας η κοινή λήξη και ότι οι ημέρες λήξης των νέων γραμματίων είναι μεταγενέστερες της ημέρας αντικατάστασης και διαφέρουν κατά 30 ημέρες.

Λύση

Αφού ως εποχή ισοδυναμίας λαμβάνεται η κοινή λήξη, τότε αυτή είναι η 5/5, δηλαδή η ημέρα λήξης του παλιού γραμματίου. Επειδή δε οι ημέρες λήξης νέων γραμματίων θα είναι μεταγενέστερες της ημέρας αντικατάστασης, οι παρούσες αξίες τους θα είναι ίσες με το άθροισμα των ονομαστικών αξιών τους με τα προεξοφλήματα τους. Επίσης η παρούσα αξία του παλιού γραμματίου θα ταυτίζεται με την ονομαστική αξία του. Επομένως η προαναφερόμενη σχέση (2) γίνεται:

$$K = K_1 + E_1 + K_2 + E_2 \quad (1)$$

Στην συνέχεια επεξεργαζόμαστε την παραπάνω σχέση, θέτοντας στη θέση του E το γνωστό τύπο που το συσχετίζει με την ονομαστική αξία, δηλαδή $E = \frac{Kv}{\Delta}$.

Οπότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται ως εξής:

$$K = K_1 + \frac{K_1 v_1}{\Delta} + K_2 + \frac{K_2 v_2}{\Delta} \Rightarrow K = K_1 \left(1 + \frac{v_1}{\Delta}\right) + K_2 \left(1 + \frac{v_2}{\Delta}\right) \quad (2)$$

Αυτή τη σχέση θα λύσουμε ως προς v_1, v_2 , λαμβάνοντας υπόψη ότι $v_2 = 30 + v_1$. Ακολουθώντας αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση (2) τις ονομαστικές αξίες των νέων γραμματίων και του παλιού καθώς και όπου $\Delta = 360/0,12 = 3000$. Θα έχουμε:

$$600 = 290 \left(1 + \frac{v_1}{3000}\right) + 290 \left(1 + \frac{v_2}{3000}\right) \Rightarrow 600 = 290 + \frac{290v_1}{3000} + 290 + \frac{290v_2}{3000} \quad (3)$$

Ισχύει όμως $v_2 = 30 + v_1$

Στην συνέχεια από την (3) θα έχουμε:

$$600 - 580 = \frac{290v_1}{3000} + \frac{290(v_1 + 30)}{3000} \Rightarrow 20 = \frac{290v_1 + 290v_1 + 8700}{3000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60000 = 290v_1 + 290v_1 + 8700 \Rightarrow 51300 = 580v_1 \Rightarrow v_1 = 88,45 \cong 88$$

Άρα $v_2 = 30 + 88 = 118,45 \cong 118$

Επομένως οι ημέρες λήξης των δυο νέων γραμματίων υπολογίζονται βάση του παρακάτω πίνακα:

	K_1	K_2
M	HM	HM
5	30-4=26	30-4=26
6	30	30
7	30	30
8	->2	30
9		->2
Σ	88	118

Κατά συνέπεια οι ημέρες λήξης των νέων γραμματίων θα είναι οι 2/8 και 2/9 αντίστοιχα.

Μέρος Δεύτερο: Μακροπρόθεσμες Οικονομικές Πράξεις

Οι μακροπρόθεσμες οικονομικές πράξεις έχουν συνήθως διάρκεια μεγαλύτερη του ενός έτους. Στο πλαίσιο τους λύνονται προβλήματα δανεισμού ή καταθέσεων όπου ισχύει ο σύνθετος τόκος ή ανατοκισμός.

4. Ανατοκισμός

Υπενθυμίζεται ότι, σύνθετη κεφαλαιοποίηση ή ανατοκισμός (compound interest) ονομάζεται το σύστημα στο οποίο ο τόκος κεφαλαιοποιείται στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου, στην οποία υποδιαιρείται το χρονικό διάστημα επένδυσης ενός χρηματικού κεφαλαίου που επενδύεται σήμερα. Η μελλοντική αξία (terminal value or future value) του αρχικού χρηματικού κεφαλαίου είναι δηλαδή η αξία που θα έχει στο μέλλον το ποσό αυτό που επενδύεται σήμερα.

4.1. Υπολογισμός της τελικής αξίας, όταν η χρονική δίνεται σε ακέραιο αριθμό περιόδων:

Ο υπολογισμός της τελικής αξίας δίδεται από την σχέση:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

όπου:

- K_n = η τελική αξία
- K_0 = το αρχικό κεφάλαιο
- i = το επιτόκιο
- n = η χρονική διάρκεια σε αριθμό ετών

Ο συντελεστής $(1 + i)^n$ ονομάζεται συντελεστής ανατοκισμού.

Η παραπάνω σχέση της τελικής αξίας ισχύει όταν το επιτόκιο είναι ετήσιο και η χρονική διάρκεια τοκισμού υποδιαιρείται σε ετήσιες περιόδους.

Όταν η χρονική διάρκεια τοκισμού υποδιαιρείται σε περιόδους μικρότερες του έτους π.χ. εξάμηνα, τετράμηνα, τρίμηνα, μήνες, τότε η παραπάνω σχέση μετατρέπεται ως εξής:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i')^{\lambda \cdot n}$$

όπου:

- i' = το προσαρμοσμένο στη μικρότερη του έτους περίοδο ανατοκισμού ετήσιο επιτόκιο,
- λ = οι φορές των μηνών της περιόδου ανατοκισμού που αντιστοιχούν σε ένα έτος.

Για να εφαρμοσθεί επομένως η παραπάνω σχέση της μελλοντικής αξίας, απαιτείται πριν, να υπολογισθεί το προσαρμοσμένο επιτόκιο i' . Αυτό γίνεται με τη χρήση της σχέσης:

$$i' = (1 + i)^{\frac{\mu}{12}} - 1$$

όπου:

- i = το ετήσιο επιτόκιο,
- μ = οι μήνες της περιόδου ανατοκισμού.